

Matematika je jazykem přírodních věd

Fyzikální kaleidoskop
Olomouc 2015
Tomáš Fürst

ÚVODNÍ HRA

- Sledujte postupně se objevující posloupnost čísel.
- Až vám bude jasné, jaké bude další číslo, řekněte.

1, 0,



ÚVODNÍ HRA

- Sledujte postupně se objevující posloupnost čísel.
- Až vám bude jasné, jaké bude další číslo, řekněte.

1, 0, 1,



ÚVODNÍ HRA

- Sledujte postupně se objevující posloupnost čísel.
- Až vám bude jasné, jaké bude další číslo, řekněte.

1, 0, 1, 0,



ÚVODNÍ HRA

- Sledujte postupně se objevující posloupnost čísel.
- Až vám bude jasné, jaké bude další číslo, řekněte.

1, 0, 1, 0, 1,



ÚVODNÍ HRA

- Sledujte postupně se objevující posloupnost čísel.
- Až vám bude jasné, jaké bude další číslo, řekněte.

1, 0, 1, 0, 1, 0,



ÚVODNÍ HRA

- Sledujte postupně se objevující posloupnost čísel.
- Až vám bude jasné, jaké bude další číslo, řekněte.

1, 0, 1, 0, 1, 0, 1,



ÚVODNÍ HRA

- Sledujte postupně se objevující posloupnost čísel.
- Až vám bude jasné, jaké bude další číslo, řekněte.

1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...



ÚVODNÍ HRA

1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

- Tuto nekonečně dlouhou posloupnost čísel lze zachytit velmi jednoduchým pravidlem:

Stále opakuj dvojici 1, 0.

- Nebo poněkud matematictěji:

10/99

- To se vejde do tří bajtů!



ÚVODNÍ HRA

- Zahrejme si tu samou hru ještě jednou.
- Až vám bude jasné, jaké bude další číslo, řekněte.

1, 1, 2,



ÚVODNÍ HRA

- Zahrajme si tu samou hru ještě jednou.
- Až vám bude jasné, jaké bude další číslo, řekněte.

1, 1, 2, 3,



ÚVODNÍ HRA

- Zahrajme si tu samou hru ještě jednou.
- Až vám bude jasné, jaké bude další číslo, řekněte.

1, 1, 2, 3, 5,



ÚVODNÍ HRA

- Zahrejme si tu samou hru ještě jednou.
- Až vám bude jasné, jaké bude další číslo, řekněte.

1, 1, 2, 3, 5, 8,



ÚVODNÍ HRA

- Zahrajme si tu samou hru ještě jednou.
- Až vám bude jasné, jaké bude další číslo, řekněte.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,



ÚVODNÍ HRA

- Zahrejme si tu samou hru ještě jednou.
- Až vám bude jasné, jaké bude další číslo, řekněte.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,



ÚVODNÍ HRA

- Zahrejme si tu samou hru ještě jednou.
- Až vám bude jasné, jaké bude další číslo, řekněte.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...



ÚVODNÍ HRA

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

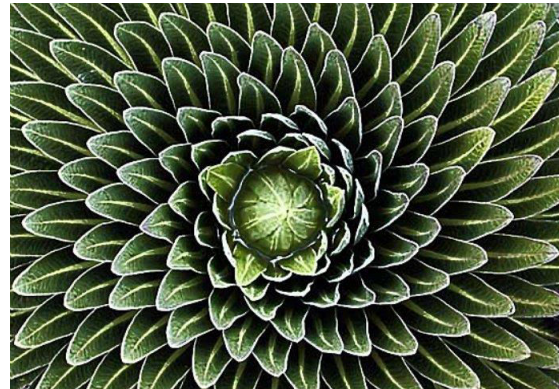
- Tentokrát pravidlo zní:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

- Nebo tentokrát poněkud méně prvoplánově:

$$a_n = \frac{b^n - c^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{kde } b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{a} \quad c = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

- Každopádně ne víc než 50 bajtů v ASCII kódu.



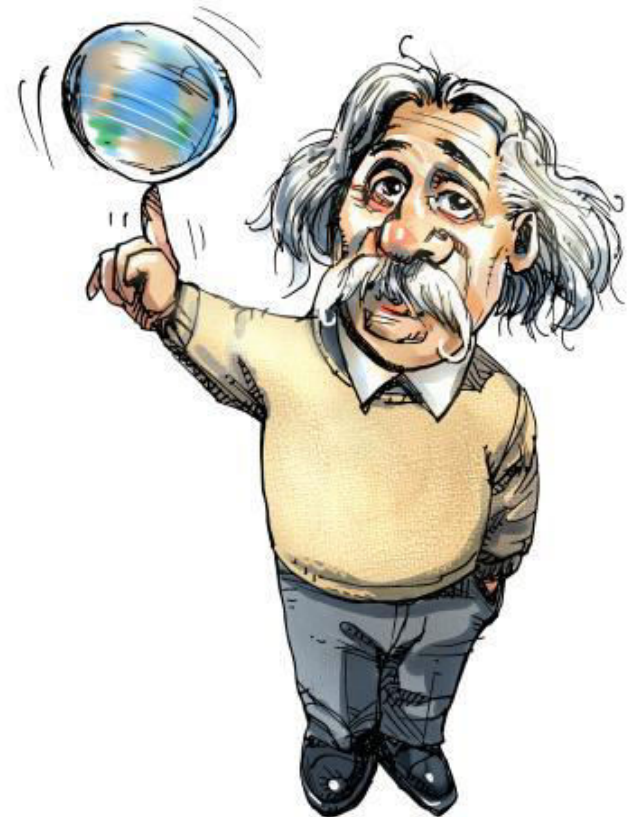
INFORMAČNÍ KOMPRESSE

- Smysl úvodní hry: pochopit koncept informační komprese.
- Něco zdánlivě velmi složitého dobře vystihnout něčím velmi jednoduchým.
- Informační komprese = porozumění.

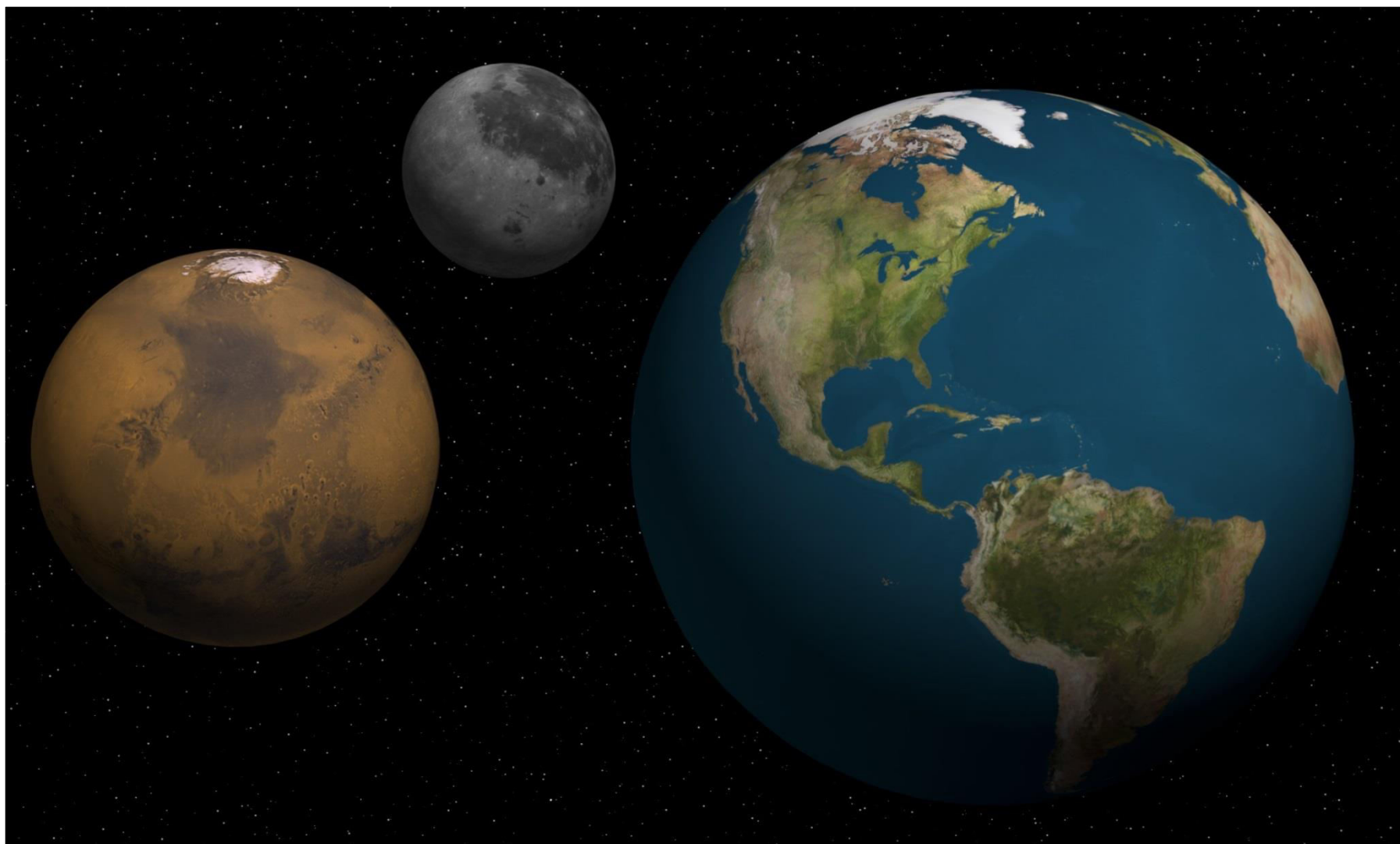


ČTYŘI TEZE TÉTO PŘEDNÁŠKY

- Fyzika je nesmírně úspěšným pokusem o informační kompresi přírody.
- Matematika je jazykem této informační komprese.
- Proč je matematika tak nesmírně vhodná k popisu přírody, je velká filosofická záhada.
- Úspěch matematiky v přírodních vědách ostře kontrastuje s katastrofálními výsledky jejího užívání ve vědách společenských, zejména v ekonomii.



OBKLOPENI POHYBEM



OBKLOPENI POHYBEM



OBKLOPENI POHYBEM

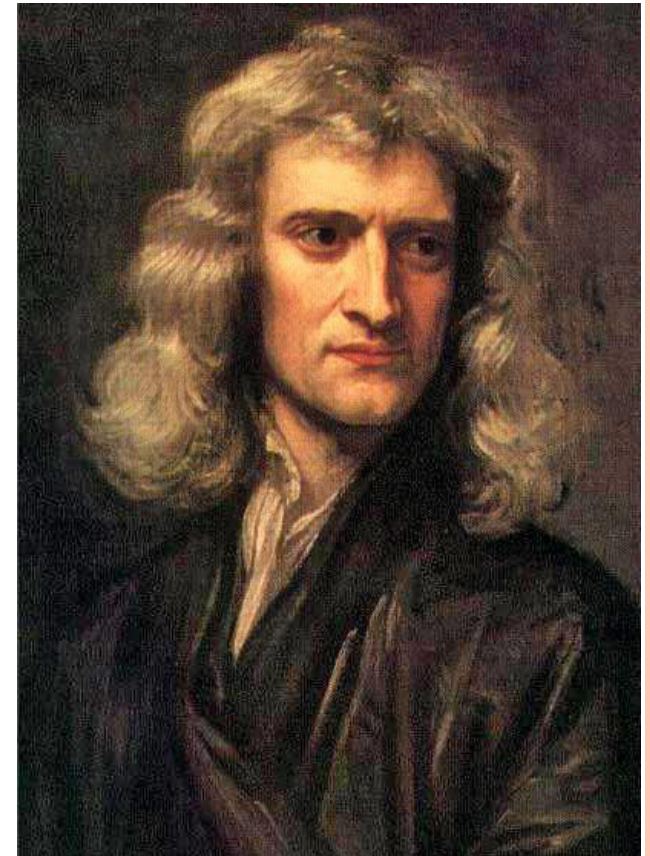


ОБКЛОПЕНИ ПОДВИЖЕМ



INFORMAČNÍ KOMPRESSE PRVNÍ: KLASICKÁ DYNAMIKA

- 1686 Isaac Newton:
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica
- Veškerou mnohost pohybu vysvětlil pomocí jediného principu: $F = ma$
- To je informační komprese!



DALŠÍ INFORMAČNÍ KOMPRESSE

- **Termodynamika**

Sadi Carnot

William Thompson

Rudolf Clausius

James Maxwell

Ludwig Boltzmann

Willard Gibbs

- **Elektrodynamika**

James Maxwell

- **Mechanika kontinua**

Joseph-Louis Lagrange

Leonhard Euler

Augustin-Louis Cauchy

- **Relativita**

Albert Einstein

- **Kvantová mechanika**

Max Planck

Erwin Schrodinger

Wolfgang Pauli

Werner Heisenberg

Niels Bohr

- **Kvantová teorie pole**

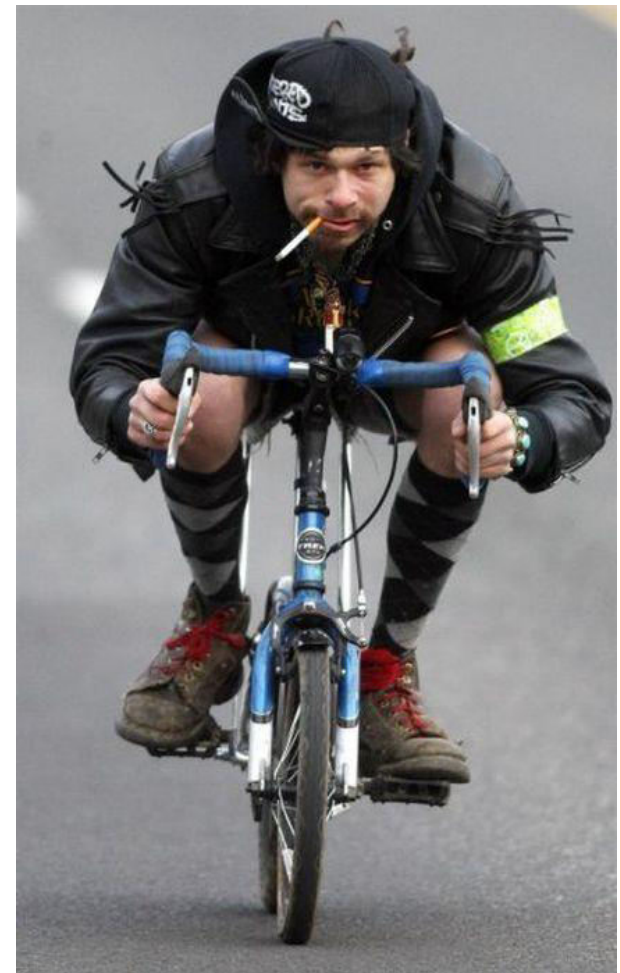
QED, Richard Feynman,

QCD, Eugene Wigner



KVALITA INFORMAČNÍCH KOMPRESÍ

- Srovnejte dvě mé oblíbené informační komprese:
 - $F = ma$
 - **Za všechno můžou cyklisti.**
- Nevěřte postmodernistům, že jsou obě stejně oprávněné!
- Odlišuje je explikační síla.



EXPLIKAČNÍ SÍLA

- Explikační síla je schopnost správně předpovědět výsledek experimentu.
- Předpověď musí být kvantitativní.
- Tedy musí obsahovat matematiku.

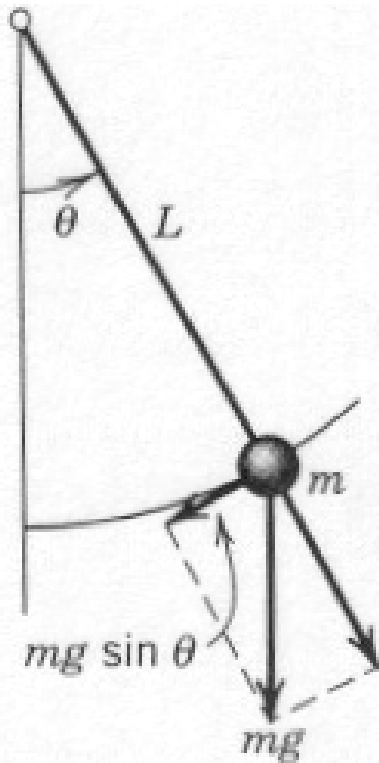


MATEMATIKA

- Matematika je jazykem těchto informačních kompresí.
- $F = ma$ lze říct česky, anglicky nebo hebrejsky, ale předpověď výsledku experimentu musí být vždy v číselné formě (kdy, kde, kolik, ...).
- Pojďme se podívat na malou ukázkou matematického jazyka v praxi.



KYVADLO



- Působící síla je rovna změně hybnosti
 $-mg \sin(\theta(t)) = \text{změna } (m L \omega(t))$
- $\theta(t)$ je hledaná výchylka kyvadla jako funkce času (v radiánech)
- $\omega(t)$ je úhlová rychlost (v radiánech za sekundu), která s výchylkou souvisí skrze vztah
 $\omega(t) = \text{změna } (\theta(t))$
- Počáteční podmínky jsou
 $\theta(0) = \theta_0, \quad \omega(0) = 0$



KYVADLO

- Co je to změna?

$$\textit{zmena}(\theta) = \frac{\theta(\textit{za chvíli}) - \theta(\textit{ted})}{\textit{chvíle}}$$

- Z počáteční výchylky $\theta(0)$ a počáteční rychlosti $\omega(0)$ lze zjistit výchylku v čase h takto:

$$\frac{\theta(h) - \theta(0)}{h} = \omega(0)$$

tedy

$$\theta(h) = \theta(0) + h\omega(0).$$



KYVADLO

- Z počáteční úhlové rychlosti $\omega(0)$ lze zjistit rychlost v čase h takto:

$$\frac{mL\omega(h) - mL\omega(0)}{h} = -mg \sin(\theta(0))$$

tedy

$$\omega(h) = \omega(0) - \frac{hg}{L} \sin(\theta(0)).$$

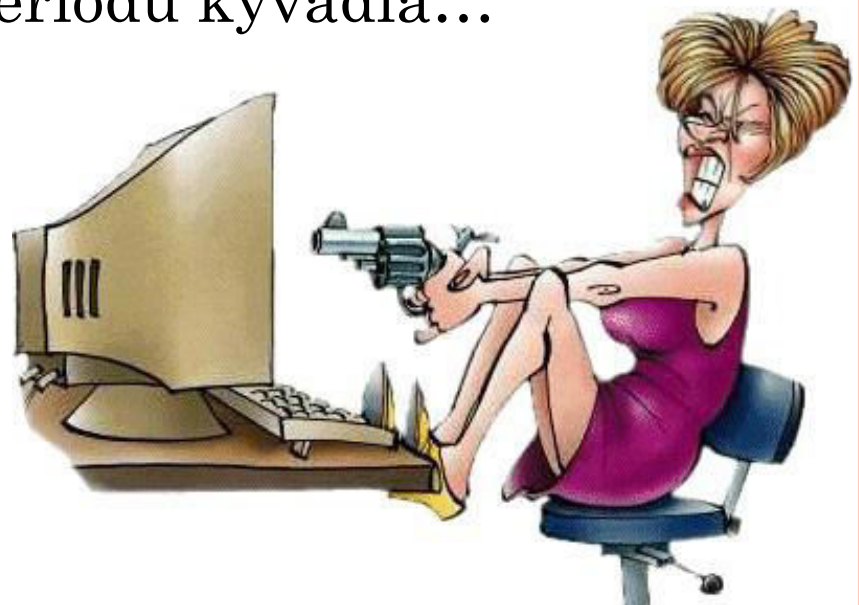
- Máme automat

$$[\theta(0), \omega(0)] \rightarrow [\theta(h), \omega(h)] \rightarrow [\theta(2h), \omega(2h)] \rightarrow \dots$$



KYVADLO

- Ukázka programového kódu a pár experimentů.
- Křivka ve fázovém prostoru nemá analytické vyjádření.
- Kdo umí napsat *for* cyklus, vyhrává!
- Přece jen ale není špatné umět něco spočítat s tužkou na papíře, třeba periodu kyvadla...
- Počítače nám otevřely nové obzory: chaos a nelineární dynamika.



JAZYK KLASICKÉ DYNAMIKY

- Přírodní zákony jsou ve tvaru

$$\textit{změna(veličina } A) = \textit{veličina } B$$

- Hledáme tedy funkci (času) A , jejíž změna (derivace) je úměrná funkci B , která v sobě často obsahuje opět funkci A .
- Vzpomeňte si znovu na kyvadlo.
- Tomu se říká obyčejná diferenciální rovnice.



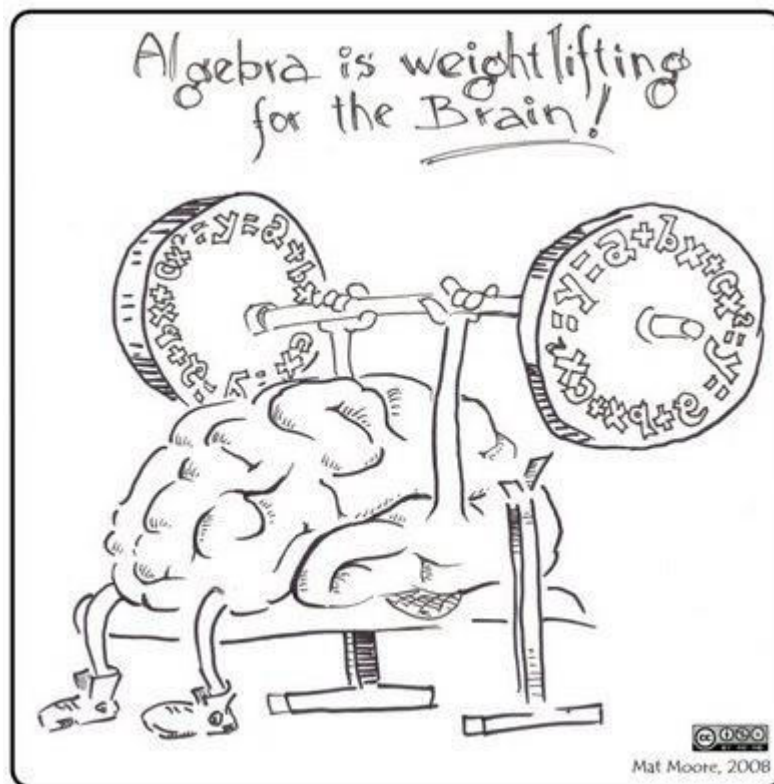
GYMNAZIÁLNÍ MATEMATIKA VYSVĚTLENA

- Protože $F = ma$, je třeba umět **ODR**.
- Jejich řešení jsou ve formě **integrálů**.
- Integrály jsou přímo odvozeny z **derivací**.
- Derivace jsou jen speciálním případem **limit**.
- Limity jsou zobecněním **spojitosti**.
- Spojitost je stěžejní vlastnost **funkcí**.
- Funkce jsou pravidla jak přiřazovat číslům **čísla**.
- Ta pravidla často obsahují **algebraické výrazy**.



GYMNAZIÁLNÍ MATEMATIKA VYSVĚTLENA

- A to všechno proto, že $F = ma$!
- Filipika proti českým bourbakistům.



VYSOKOŠKOLSKÁ MATEMATIKA

VYSVĚTLENA

- Společným jazykem termodynamiky, elektrodynamiky a mechaniky kontinua jsou parciální diferenciální rovnice (PDR).
- Rovnice obsahují změny (derivace) hledaných funkcí jak v čase tak v prostoru.
- Například rovnice pohybu ocelového nosníku (mechanika kontinua) a rovnice šíření světla (elektromagnetismus) jsou identické!
- Feynmanova věta: stejné rovnice mají stejná řešení 😊.



MALÁ UKÁZKA PDR V AKCI:

MAXWELLOVY ROVNICE

Point Form	Integral Form
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{Ampère's law})$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{Faraday's law; } S \text{ fixed})$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho \, dv \quad (\text{Gauss' law})$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{nonexistence of monopole})$



VYSOKOŠKOLSKÁ MATEMATIKA

VYSVĚTLENA

- Protože máme termodynamiku a elektromagnetismus, potřebujeme umět **PDR**.
- K jejich řešení je třeba **potenciálů, objemových, plošných a křivkových integrálů**.
- Tyto jsou odvozeny z **parciálních derivací**.
- **Rotace, divergence a gradienty** jsou jejich různé speciální kombinace.
- Celé je to odvozeno z obyčejných **derivací a integrálů**.



VZHŮRU MATEMATICKOU DIVOČINOU

- ODR a PDR se odehrávají na jevišti tvořeném **trojrozměrným eukleidovským prostorem** a nezávislým lineárně dopředu jdoucím časem.
- Příroda ale kašle na to, že se vám dobře uvažuje v $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ a radši se nechává popisovat divočejšími strukturami.
- Pojďme se na ně alespoň podívat.



MATEMATICKÁ DIVOČINA „*LIGHT*“

- Představa fázového prostoru ve statistické fyzice.
- Fázový prostor batohu ideálního plynu má 6×10^{23} dimenzí!
- Matematický aparát je OK, ale nelze se spolehnout na geometrickou intuici, spíše naopak.
- Například poměr objemu krychle a jí vepsané koule jde (s dimenzí) k nekonečnu!
- Je třeba mít neprůstřelný aparát matematické analýzy v eukleidovských prostorech konečné ale velmi vysoké dimenze.
- Nejde o rozvíjení abstraktního myšlení! Je to praktická nutnost.



MATEMATICKÁ DIVOČINA „ADVANCED“

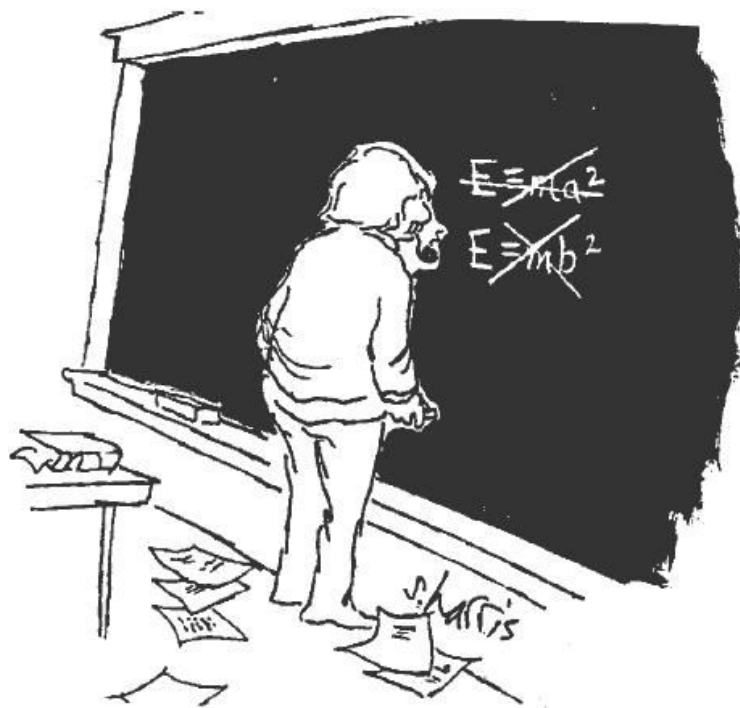
- Při vysokých rychlostech přestane být udržitelná představa o nezávislosti prostoru a času.
- Nezbyvá než pracovat ve čtyřrozměrném (byť stále ještě víceméně „rovném“) prostoru.
- Na tomto jevišti se řeší staré dobré PDR.
- Této části matematiky se říká analýza na varietách.
- Fyzikové tomu říkají speciální teorie relativity.
- Překvapivě tato matematika existovala už 50 let předtím, než si Einstein všiml, že příroda to vidí taky tak.



MATEMATICKÁ DIVOČINA

„*MORE ADVANCED*“

- V přítomnosti extrémně hmotných objektů přestane být udržitelná představa „víceméně rovného“ čtyřrozměrného prostorčasu a je třeba ji nahradit prostorčasem zakřiveným, a to navíc v každém bodě jinak.
- Na tomto jevišti se řeší nové (navíc nelineární) PDR.
- Této části matematiky se říká analýza na varietách.
- Fyzikové tomu říkají obecná teorie relativity.



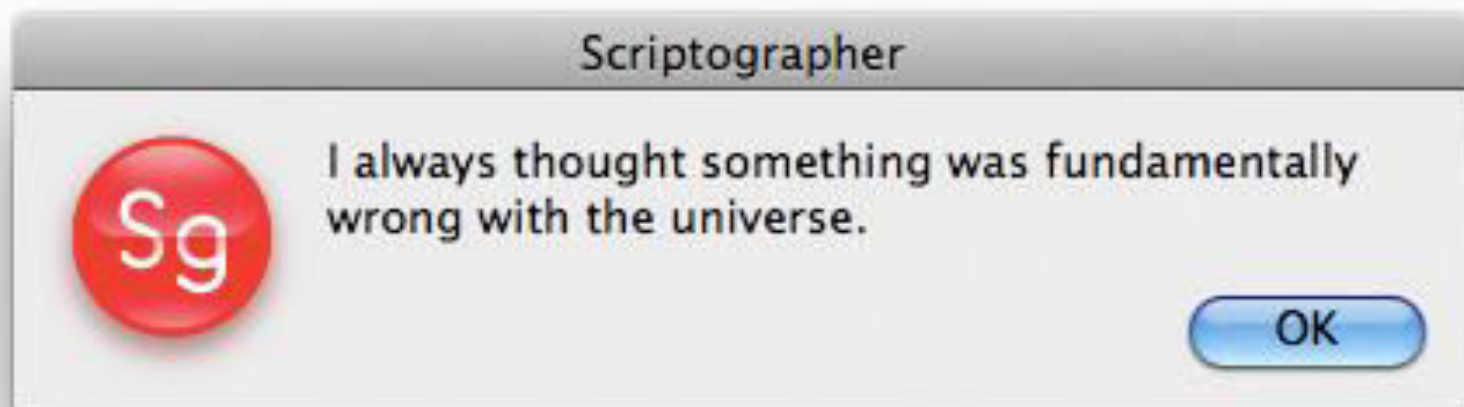
MATEMATICKÁ „*HARDCORE*“ DIVOČINA

- Když začnou být objekty příliš malé, nejdou rozumně popsat jinak než pomocí prostorů **nekonečné** dimenze.



MATEMATICKÁ „*HARDCORE*“ DIVOČINA

- Když začnou být objekty příliš malé, nejdou rozumně popsat jinak než pomocí prostorů **nekonečné** dimenze.



MATEMATICKÁ „*HARDCORE*“ DIVOČINA

- Když začnou být objekty příliš malé, nejdou rozumně popsat jinak než pomocí prostorů **nekonečné** dimenze.
- Ještě k tomu nad komplexními čísly.
- Jeviště pro PDR se změní z prostorů konečné dimenze na Hilbertovy a Banachovy prostory nekonečné dimenze.



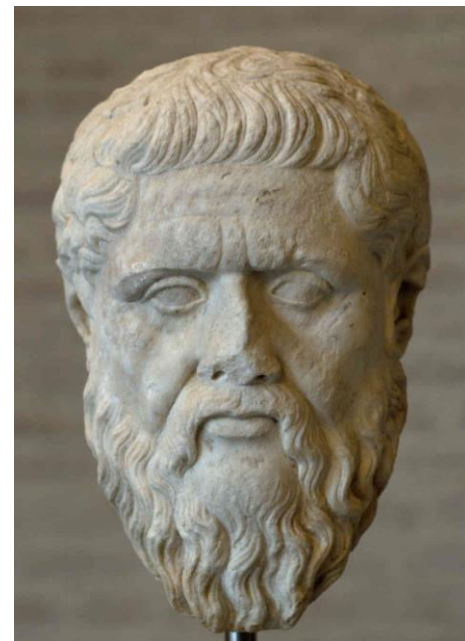
MATEMATICKÁ „*HARDCORE*“ DIVOČINA

- Prvky těchto prostorů (**vlnové funkce**) popisují stav systému.
- Nekonečné matice (**operátory**) odpovídají fyzikálním veličinám.
- Jejich **vlastní čísla** odpovídají možným výsledkům experimentů.
- Matematici tomu říkají **funkcionální analýza**.
- Fyzici tomu říkají **kvantová mechanika**.
- Ve skutečnosti je to **lineární algebra** hraná na nekonečně rozměrném jevišti.



NEJVĚTŠÍ FILOSOFICKÁ ZÁHADA

- Matematika není přírodní věda.
- Nespočívá na pozorování, měření, nezajímá ji, jak a proč funguje Vesmír.
- Stojí na sedmi poměrně odtažitých axiomech.
- Na nich stojí celá obrovská budova.
- Přesto kdykoliv otevřeme v této budově okno, hledíme přímo do otevřeného okna vedlejší budovy fyziky.
- Čím víc rozumíme přírodě, tím méně odpovídá našemu selskému rozumu, ale více odpovídá odtažitým matematickým konstruktům.
- Galileo: „*God wrote the universe in the language of mathematics*“.
- (Někteří) matematici jsou dnes posledními platoniky.



TRAGÉDIE SPOLEČENSKÝCH VĚD

- Matematizace přírodních věd byl (a je) obrovský úspěch.
- Společenské vědy: závist a komplex méněcennosti.
- Bezmyšlenkovité přejímání různých matematických metod.
- Paul Samuelson: Nobelova cena za ekonomii 1970.



TRAGÉDIE SPOLEČENSKÝCH VĚD

- Výsledek: katastrofální přecenění našeho porozumění společnosti a ekonomice, nesmyslné řízení a katastrofální finanční krize 2008.



TUPLOVANÁ TRAGÉDIE SPOLEČENSKÝCH VĚD

- Nesmyslné matematické metody jsou navíc zesíleny krizí statistiky.
- Začíná to ohrožovat i měkčí přírodní vědy a medicínu.
- Po roce 2008 nedošlo k žádné reflexi, spíše naopak.
- Nehrajte si se sirkami a benzínem ve stohu, nehrajte si s derivacemi a integrály v ekonomii!



ČTYŘI TEZE TÉTO PŘEDNÁŠKY PODRUHÉ

- Fyzika je nesmírně úspěšným pokusem o informační kompresi přírody.
- Matematika je jazykem této informační komprese.
- Proč je matematika tak nesmírně vhodná k popisu přírody, je velká filosofická záhada.
- Úspěch matematiky v přírodních vědách ostře kontrastuje s katastrofálními výsledky jejího užívání ve vědách společenských, zejména v ekonomii.



